ΜΑΘΗΜΑ 21
1.7 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ
Συνέχεια του μαθήματος 20

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-2^{x+1}}{4\cdot 3^x+2^x}$

Όταν $x\to+\infty$, βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μεγαλύτερη βάση

Προτεινόμενη λύση

Εργαζόμαστε με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,\ +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^{x+1}}{4\cdot 3^x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2\cdot 2^x}{4\cdot 3^x+2^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[1-2\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]}{3^x\left[4+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^x}{4+\left(\frac{2}{3}\right)^x}\qquad\textbf{(1)}$$

Επειδή $0<\frac{2}{3}<1$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$

Θυμόμαστε τη γραφική παράσταση, άρα και τα όρια της α^x

$$(1)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^{x+1}}{4\cdot 3^x+2^x}=\frac{1-2\cdot 0}{4+0}=\frac{1}{4}$$

12.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-2^{x+1}}{4\cdot 3^x+2^x}$

Όταν $x\to-\infty$, βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μικρότερη βάση

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-2^{x+1}}{4\cdot 3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-2\cdot 2^x}{4\cdot 3^x+2^x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x-2\right]}{2^x\left[4\left(\frac{3}{2}\right)^x+1\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-2}{4\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\qquad\textbf{(1)}$$

Επειδή $\frac{3}{2}>1$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$

$$(1)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-2^{x+1}}{4\cdot 3^x+2^x}=\frac{0-2}{4\cdot 0+1}=-\frac{2}{1}=-2$$

13.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+4^x-6^x}{4^x+5^x+6^x}$

Υπόδειξη.

Επειδή $x\to+\infty$, βγάζουμε κοινό παράγοντα το 6^x

14.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x+4^x-6^x}{4^x+5^x+6^x}$

Προτεινόμενη λύση

$$f(x) = \frac{2^x+4^x-6^x}{4^x+5^x+6^x} = \frac{2^x\left[1+\left(\frac{4}{2}\right)^x-\left(\frac{6}{2}\right)^x\right]}{4^x\left[1+\left(\frac{5}{4}\right)^x+\left(\frac{6}{4}\right)^x\right]} = \left(\frac{2}{4}\right)^x \frac{\left[1+\left(\frac{4}{2}\right)^x-\left(\frac{6}{2}\right)^x\right]}{\left[1+\left(\frac{5}{4}\right)^x+\left(\frac{6}{4}\right)^x\right]} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^x = +\infty$ αφού $0<\frac{2}{4}<1$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{2}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{2}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{4}\right)^x = 0$

αφού οι βάσεις είναι >1

Οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left[1+\left(\frac{4}{2}\right)^x-\left(\frac{6}{2}\right)^x\right]}{\left[1+\left(\frac{5}{4}\right)^x+\left(\frac{6}{4}\right)^x\right]} = \dfrac{1+0-0}{1+0+0} = 1$

Θυμόμαστε τη γραφική παράσταση, άρα και τα όρια της α^x

$(1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

15.

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\alpha^x - 10^x}{\alpha^x + 10^{x+1}}$

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $0 < \alpha < 10$ (βγάζουμε κοινό παράγοντα το 10^x)

$$f(x) = \frac{2\alpha^x - 10^x}{\alpha^x + 10^{x+1}} = \frac{2\alpha^x - 10^x}{\alpha^x + 10 \cdot 10^x} = \frac{10^x\left[2\left(\frac{\alpha}{10}\right)^x - 1\right]}{10^x\left[\left(\frac{\alpha}{10}\right)^x + 10\right]} = \frac{\left[2\left(\frac{\alpha}{10}\right)^x - 1\right]}{\left[\left(\frac{\alpha}{10}\right)^x + 10\right]} \quad \textbf{(1)}$$

$$0 < \alpha < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{10} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{10}\right)^x = 0$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2\cdot 0 - 1}{0 + 10} = -\frac{1}{10}$$

- Όταν $\alpha > 10$ (βγάζουμε κοινό παράγοντα το α^x)

  Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

- Όταν $\alpha = 10$, τότε $f(x) = \dfrac{2\cdot 10^x - 10^x}{10^x + 10^{x+1}}$

$$= \frac{10^x}{10^x + 10\cdot 10^x} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{11}$

16.

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\alpha^x - 10^x}{\alpha^x + 10^{x+1}}$

Υπόδειξη.

Ακολούθησε την προηγούμενη άσκηση

17.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{3x}{x-2}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

Προτεινόμενη λύση

- Για το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{3x}{x-2}$

  Θέτουμε $u = \frac{3x}{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x} = 3$

  Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to3} \ln u = \ln 3$

- Για το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

  Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

- Για το $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \ln\frac{3x}{x-2}$

  Θέτουμε $u = \frac{3x}{x-2} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} u = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{3x}{x-2} = \frac{3\cdot0}{0-2} = 0$

  Άρα $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \ln\frac{3x}{x-2} = \lim\limits_{u\to0^+} \ln u = -\infty$

- Για το $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \ln\frac{3x}{x-2}$

  Θέτουμε $u = \frac{3x}{x-2} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to2^+} u = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x}{x-2} = +\infty$

  Άρα $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \ln\frac{3x}{x-2} = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$

18.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(1+3^x) - \ln(2+2^x)]$

Προτεινόμενη λύση

Πεδίο ορισμού $= \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(1+3^x) - \ln(2+2^x) = \ln\frac{1+3^x}{2+2^x} \qquad \mathbf{(1)}$$

Θέτουμε $u = \dfrac{1+3^x}{2+2^x} \Rightarrow u = \dfrac{3^x\left(\dfrac{1}{3^x}+1\right)}{3^x\left[2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right]}$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1\right]\frac{1}{\left[2\dfrac{1}{3^x} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right]} \qquad \mathbf{(2)}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 1\right] = 0 + 1 = 1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right] = 2\cdot 0 + 0 = 0$ με $\left[2\dfrac{1}{3^x} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right] > 0$,

οπότε η (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u = +\infty$

(1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln u = +\infty$

19.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} [x+2 - \ln(1+2^x)]$

Υπόδειξη.

$$f(x) = x+2-\ln(1+2^x)$$

$$= \ln e^{x+2} - \ln(1+2^x) = \ln\frac{e^{x+2}}{1+2^x} = \ln\frac{e^2e^x}{1+2^x}$$

και συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση

20.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,ημ^{ν}\frac{1}{x}\right)$, $ν\in\mathbb{N}^*$

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $ν=1$

  Αναζητάμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,ημ\frac{1}{x}\right)$

  Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

  και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,ημ\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1}{u}ημu\right)=\lim\limits_{u\to0}\frac{ημu}{u}=1$

- Όταν $ν>1$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,ημ^{ν}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\,ημ\frac{1}{x}ημ^{ν-1}\frac{1}{x}\right)$$

  $$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\,ημ\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to+\infty}\left(ημ^{ν-1}\frac{1}{x}\right)\quad\textbf{(1)}$$

  Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,ημ\frac{1}{x}\right)=1$ (αποδείχθηκε στην πρώτη περίπτωση)

  και θέτοντας $u=\frac{1}{x}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ημ^{ν-1}\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to0}ημ^{ν-1}u=0$

  (1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,ημ^{ν}\frac{1}{x}\right)=1\cdot0=0$

21.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{2x^2-1}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Εργαζόμαστε σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\ \alpha)$, όπου δε μηδενίζεται το $2x^2-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-4x\eta\mu\frac{1}{x}\right)}{2x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1-4x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}\cdot\left[1-4\lim_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right]\overset{*}{=}\frac{1}{2}[1-4\cdot1]=-\frac{3}{2}$$

$*$ Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

Θέτουμε $u=\dfrac{1}{x}$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1}{u}\eta\mu u\right)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

22.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{3}{x}}{\eta\mu\frac{1}{x}}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\eta\mu\frac{3}{x}}{\eta\mu\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2x\eta\mu\frac{3}{x}}{x\eta\mu\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{3}{x}\right)\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)}\qquad\textbf{(1)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{3}{x}\right)$ θέτουμε $u=\dfrac{3}{x}$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{3}{x}\right)=\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{3}{u}\eta\mu u\right)=3\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3\cdot1=3$

Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$ (Βλέπε στην προηγούμενη άσκηση)

(1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{3}{x}}{\eta\mu\frac{1}{x}}=+\infty$

23.

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι $f(x)[f(x)-2x]=x^4-x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράστασή της βρίσκεται πάνω από τη διχοτόμο της $1^{ης}-3^{ης}$ γωνίας των αξόνων. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=+\infty$

Προτεινόμενη λύση

$$f(x)[f(x)-2x]=x^4-x^3 \Rightarrow f^2(x)-2xf(x)=x^4-x^3$$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^4-x^3+x^2$$

$$[f(x)-x]^2=x^4-x^3+x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]^2=\lim_{x\to+\infty}(x^4-x^3+x^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]^2=\lim_{x\to+\infty}x^4=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{[f(x)-x]^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-x|=+\infty \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή η C_f βρίσκεται πάνω από τη διχοτόμο της $1^{ης}-3^{ης}$ γωνίας των αξόνων,

θα είναι $f(x)>x$, δηλαδή $f(x)-x>0$.

$$(1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=+\infty$$

24.

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι $\left| f(x)\sqrt{x^2+1}-x \right| \le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Προτεινόμενη λύση

- Για το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\left| f(x)\sqrt{x^2+1}-x \right| \le 1 \;\Rightarrow\; -1 \le f(x)\sqrt{x^2+1}-x \le 1$$

$$-1+x \le f(x)\sqrt{x^2+1} \le 1+x$$

$$\frac{-1+x}{\sqrt{1+x^2}} \le f(x) \le \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Αλλά
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{0+1}{\sqrt{0+1}} = 1$$

και ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

Από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

- Για το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\frac{0+1}{\sqrt{0+1}} = -1$$

25.

Για συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι $f^3(x)+f(x)=x^3$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$. Να αποδείξετε ότι :

i) $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$

ii) $f(x)<x$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $f(x)\le 0$ για κάποιο $x\in(0,\ +\infty)$

Απαγωγή σε άτοπο

Τότε $f^3(x)\le 0$. Άρα $f^3(x)+f(x)\le 0$

Αλλά $f^3(x)+f(x)=x^3$ οπότε $x^3\le 0$

Άρα $x\le 0$ που είναι άτοπο

ii)

Έστω $f(x)\ge x$ για κάποιο $x\in(0,\ +\infty)$

Απαγωγή σε άτοπο

Τότε $f^3(x)\ge x^3$. Άρα $f^3(x)+f(x)\ge x^3+x>x^3$

που είναι άτοπο, αφού $f^3(x)+f(x)=x^3$

iii)

Είναι $0<\dfrac{f(x)}{x^3}<\dfrac{x}{x^3}=\dfrac{1}{x^2}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$

iv)

$$f^3(x)+f(x)=x^3\ \Rightarrow\ \frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^3}=1$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3=1-\frac{f(x)}{x^3}$$

Αλλά, από (iii) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{f(x)}{x^3}\right)=1-0=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3=1\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{1}=1$